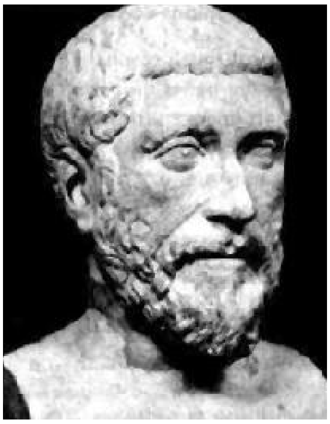
Séquence 3 – Egalité de Pythagore

Objectifs
1. Les carrés parfaits entre 1 et 144 2. Définition de la racine carrée 3. Théorème de Pythagore 4. Réciproque du théorème de Pythagore

Questions classe entière :

- Qu'est-ce qu'un nombre élevé au carré ? Exemples.
- Lien avec l'aire d'un carré
- Qu'est-ce que la racine carré d'un nombre ? Exemples
- Lien avec la longueur du côté d'un carré
- Pourquoi dit-on que l'opération inverse du carré est la racine carré ?



PYTHAGORE

de Samos

565 – 495 (?) av J.C.

Pythagore de Samos est souvent présenté comme le premier vrai mathématicien de l'histoire. Bien que représentant un personnage clef de cette discipline, on ne connaît pratiquement rien des travaux qu'il a effectivement réalisés puisqu'il ne subsiste aucune trace de ses écrits. Il est d'autant plus difficile de se faire une opinion que le personnage évoluait à la limite entre le scientifique et le religieux, s'entourant de secret et cultivant le mystère.

I. Carré – Racine carré

A. Les carrés parfaits

Le carré de a s'écrit a^2 et correspond à $a \times a$ (deux facteurs).

Un carré parfait est le carré d'un entier positif.

Voici la liste des premiers :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

B. Racine carré d'un nombre

C'est la démarche inverse du carré.

Exemples :

On sait que $2^2=4$. Donc la racine carré de 4 s'écrit $\sqrt{4}$ et est égale à 2 :

$\sqrt{4}=2$

On sait que $3^2=9$. Donc la racine carré de 9 s'écrit $\sqrt{9}$ et est égale à 3 :
$\sqrt{9}=3$

Définition :

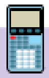
La racine carré de b s'écrit $\sqrt{b}$ et correspond au nombre qui, élevé au carré, redonne b $\sqrt{b}^2=b$.

$$3 \underset{\sqrt{9}}{\overset{3^2}{\rightleftarrows}} 9$$

Voici la liste des premiers :

b	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

C. Utilisation de la calculatrice



Je découvre la touche $\sqrt{\ }$ x^2 ou $\sqrt{\ }$ x^2 de la calculatrice

1 Quelle est la longueur du côté d'un carré d'aire :

a) 49 cm²? **b)** 16 m²? **c)** 0,36 cm²?

2 **a)** Peut-on trouver mentalement la longueur du côté d'un carré d'aire 31,36 cm²?

b) On utilise la calculatrice pour chercher ce nombre.

Casio Collège 2D +	TI-Collège Plus
• Taper la séquence suivante : SECONDE $\sqrt{\ }$ x^2 3 1 , 3 6 EXE	• Taper la séquence suivante : 2nde $\sqrt{\ }$ x^2 3 1 , 3 6 entrer

Quel est le nombre affiché par la calculatrice?

Calculer le carré de ce nombre. Que remarque-t-on?

c) Quelle est la longueur du côté d'un carré d'aire 31,36 cm²?

A l'aide de votre calculatrice, trouvez :

$\sqrt{9}$, $\sqrt{2017}$, $\sqrt{78{,}9}$, $\sqrt{0{,}123}$, $\sqrt{10}$ (nombre décimal?), $\sqrt{-9}$

P. 202 ex 16

P. 202 ex 18

Activité TICE :

Afficher BC² et AB² + AC² en tapant les textes suivants dans l'écran de saisie (qui est tout en bas) :

Saisie: "BC2=" + **Segment[B, C]²**

Saisie: "AB2+AC2=" + **(Segment[A, B]² + Segment[A, C]²)**

Compléter alors le tableau suivant pour trois triangles différents en déplaçant les points A, B et C. Pour le triangle 3, essayer d'avoir la valeur de BC² égale à AB²+AC².

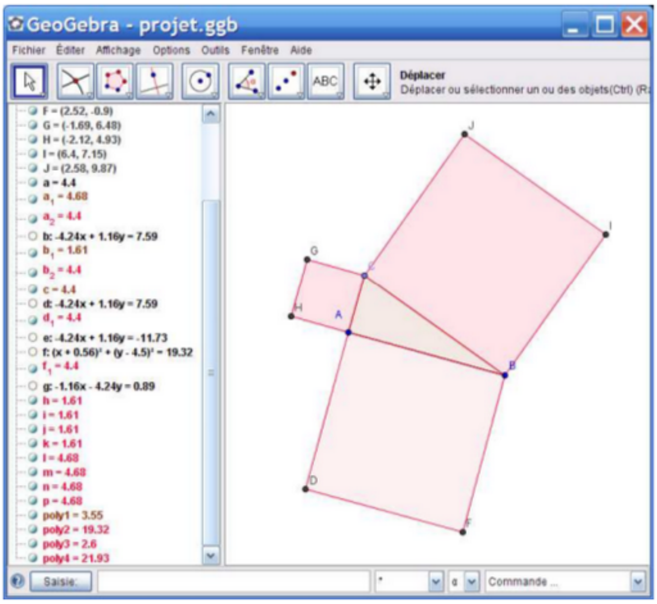
Triangle ABC rectangle en A	AB	AC	BC	AB² + AC²	BC²
Triangle 1					
Triangle 2					
Triangle 3					

Quelle conjecture peut-on faire ?

Si un triangle est ...., alors ....

Voir sur un navigateur web l'animation :

https://www.geogebra.org/m/xTdTwi37#material/w5zMEN6O



P. 196 activité 2

II. Théorème de Pythagore

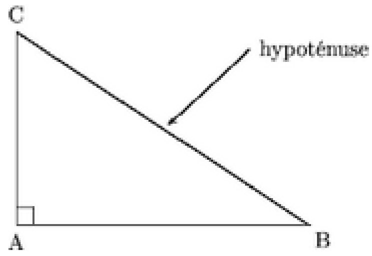
A. Triangle rectangle et vocabulaire

Rappel :

Un triangle rectangle est un triangle dont un angle est droit (égal à 90°).

Vocabulaire :

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'hypoténuse. C'est le côté le plus long du triangle.



B. Énoncé du théorème de Pythagore

Théorème :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

P. 200 ex 4

P. 200 ex 5

P. 201 ex 11

P. 197 activité 3

P. 197 activité 4

C. Réciproque du théorème de Pythagore

Propriété :

Dans un triangle si le carré du plus grand côté est égale à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.

Dans un triangle ABC, si la relation $AB^2+AC^2=BC^2$ est vérifiée alors ce triangle est rectangle en A.

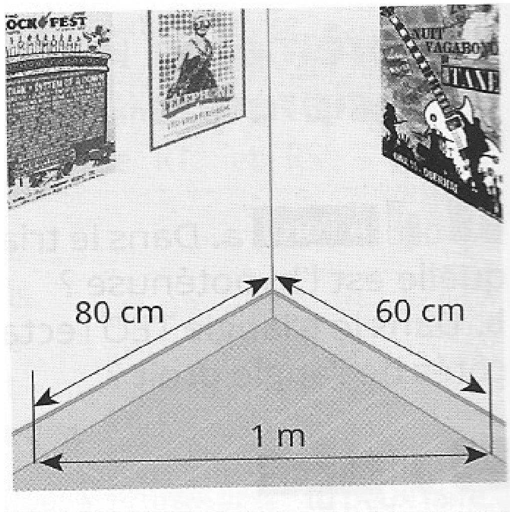
Problème :

Robin est menuisier et veut fabriquer un meuble d'angle pour sa chambre.

Il veut vérifier que les mûrs sont bien perpendiculaires.

Il prend des mesures qu'il reporte sur le dessin ci-contre.

Les mûrs de sa chambre sont-ils perpendiculaires ?



Dans le triangle MUR, le plus grand côté est [RM].

Calculons :

- D'une part :

$$RM^2 = 100^2$$
$$= 10000$$

- D'autre part :

$$RU^2 + UM^2 = 80^2 + 60^2$$
$$= 6400 + 3600$$
$$= 10000$$

On constate que : $RM^2 = RU^2 + UM^2$

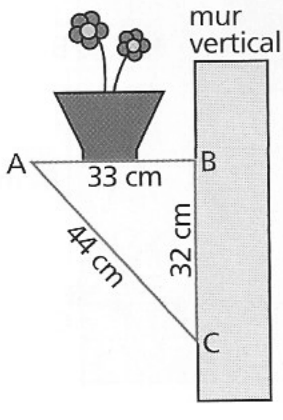
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MUR est rectangle en U.

Les mûrs de la chambre de Robin sont bien perpendiculaires.

Problème :

Sunny a construit une étagère pour poser un pot de fleur rempli à ras bord d'eau.

L'eau va-t-elle déborder ?



Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AC].

Calculons :

- D'une part :

$$AC^2 = 44^2$$
$$= 1936$$

- D'autre part :

$$AB^2+BC^2=33^2+32^2$$
$$=1089+1024$$
$$=2113$$

On constate que : $AC^2 \neq AB^2+BC^2$

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle et l'étagère [AB] n'est pas perpendiculaire au mûr (BC).

L'eau va alors déborder.

P. 204 ex 34

P. 204 ex 35

P. 205 ex 37 (découverte d'une relation parallélogramme-losange)
(pour les costauds)

P. 205 ex 41

P. 205 ex 42

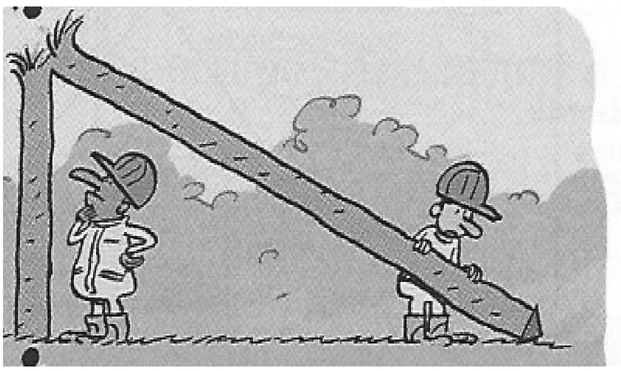
D. Calculer des longueurs avec le Théorème de Pythagore

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Si AB = 3 cm et AC = 4 cm alors :

$$BC^2=AB^2+AC^2=3^2+4^2=9+16=25$$
$$BC=\sqrt{25}=5$$

Problème :
La foudre est tombée sur un poteau téléphonique
Le poteau est cassé à 3 m du sol. Son sommet touche le sol à 4 m du pied.
Quelle était, au mètre près, la hauteur du poteau avant son foudroiement ?



Le triangle POT est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$PT^2=PO^2+OT^2$$
$$PT^2=3^2+4^2$$
$$PT^2=9+16$$
$$PT^2=25$$

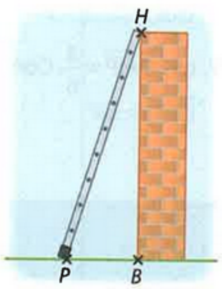
(25 est le carré de 5 : $25=5^2$)

Donc $PT=5$

La partie cassée PT du poteau mesure 5 m.

$3+5=8$

Avant le foudroiement, la hauteur du poteau était de 8 m.

Une échelle de 6 m de hauteur est adossée à un mur perpendiculaire au sol. Le haut de l'échelle est posé exactement au sommet *H* du mur et le pied *P* de l'échelle est à 2 m du mur. ▶ Calculer la hauteur exacte du mur, puis sa valeur arrondie au cm.  	Le mur étant perpendiculaire au sol, le triangle *PBH* est rectangle en *B*. D'après le théorème de Pythagore : $PH^2 = PB^2 + BH^2$ $6^2 = 2^2 + BH^2$ $BH^2 = 36 - 4 = 32$ $BH = \sqrt{32}$ m $\approx 5{,}66$ m Ainsi la hauteur exacte du mur est $\sqrt{32}$ m et l'arrondi au cm est 5,66 m.

P. 203 ex 24

P. 203 ex 26

P. 203 ex 25

P. 209 ex 69

P. 209 ex 70 (pour les costauds)

P. 209 ex 71 (pour les costauds)

P. 209 ex72 (pour les costauds)

P. 211 ex 75 (pour les costauds)

P. 213 TICE 3 avec Scratch (à voir en AP)